Matemática Discreta 1 Recuperación Primer parcial	1^{er} Apellido: ______ 2^{o} Apellido: ______ Nombre: ______ Número de matrícula:	12 de enero de 2018 Tiempo 2 horas
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid		**Nota:**

Ejercicio 1 (8 puntos)

a) Obtén el cardinal de D_{2107}, el conjunto de todos los divisores positivos de 2107.

b) En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ definimos la siguiente relación: dados $a, b \in \mathbb{N}$, decimos que aRb si $a|b^2$ ($a|b^2$ significa que "a divide a b^2"). Razona qué propiedades (reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva) cumple la relación y cuáles no.

c) Dado los conjuntos $A = \{t \in \mathbb{Z} / -4 + 3t \geq 7\}$ y $B = \{t \in \mathbb{Z}/620 - 4t \geq 5\}$. Construye el conjunto $A \cap B$ y obtén su cardinal.

Solución:

a) Para saber el cardinal de D_{2107} necesitamos encontrar los divisores primos de 2107, y para ello estudiamos si tiene algún divisor primo menor o igual que $\sqrt{2107} \approx 46$. Dividimos 2107 entre todos los primos menores o iguales que 46, que son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 y 43. Resultando $2107 = 7^2 \cdot 43$, así $|D_{2107}| = 3 \cdot 2 = 6$.

b) Reflexiva: $a|a^2 \Rightarrow aRa$, para cualquier $a \in \mathbb{N}$. Por tanto, R es reflexiva.

Simétrica: $2R8$ ya que $2|8^2$, pero $8 \not R\, 2$ ya que 8 no divide a 2^2. Por tanto, R no simétrica.

Antisimétrica: $2R4$ y $4R2$ ya que $2|4^2$ y $4|2^2$, pero $2 \neq 4$. Por tanto, R no antisimétrica.

Transitiva: $2^4 R 2^2$ ya que $2^4|(2^2)^2$ y $2^2 R 2$ ya que $2^2|2^2$, pero $2^4 \not R\, 2$ ya que 2^4 no divide a 2^2. Por tanto, R no es transitiva.

c) Teniendo en cuenta que t solo puede tomar valores enteros, la condición del conjunto A es equivalente a que

$$3t \geq 11 \Leftrightarrow t \geq \frac{11}{3} \approx 3,8 \Leftrightarrow t \geq 4.$$

Y la condición del conjunto B es equivalente a

$$4t \leq 615 \Leftrightarrow t \leq \frac{615}{4} \approx 153,7 \Leftrightarrow t \leq 153.$$

Por tanto, $A \cap B = \{t \in \mathbb{Z}/4 \leq t \leq 153\}$ y $|A \cap B| = 150$.

Ejercicio 2 (12 puntos)

Sea D_{104} el conjunto de todos los divisores positivos de 104, y sea $|$ la relación de divisibilidad; es decir, $a|b$ significa que "a divide a b".

a) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{104}, |)$.

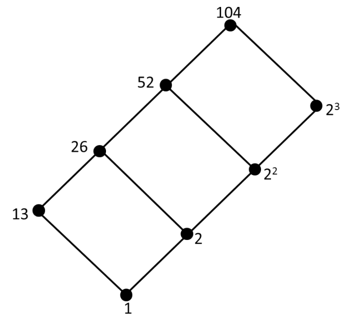
b) Obtén las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales, si los hay, del subconjunto $B = \{8, 26, 52\}$.

c) Razona si 26 y 8 tienen complementario en D_{104}. En caso afirmativo obténlos.

d) Razona si $(D_{104}, |)$ es un Álgebra de Boole.

Solución:

a) $104 = 2^3 \cdot 13, \qquad D_{104} = \{1, 2, 4, 8, 13, 26, 52, 104\}.$



b) $B = \{8, 26, 52\}$

Cotas superiores: $\{104\}$
Supremo: $\{104\}$
Máximo: $\emptyset$
Maximales: $\{8, 52\}$

Cotas inferiores: $\{2, 1\}$
Ínfimo: 2
Minimo: $\emptyset$
Minimales: $\{8, 26\}$

c) $\text{mcd}(2^3, 13) = 1$ y $\text{mcm}(2^3, 13) = 2^3 \cdot 13 = 104$. Por tanto, 13 es el complementario de 2^3.

Veamos si 26 tiene complementario. Buscamos un $x \in D_{104}$ tal que $\text{mcd}(x, 2 \cdot 13) = 1$ y $\text{mcm}(x, 2 \cdot 13) = 104$. Como $\text{mcd}(x, 2 \cdot 13) = 1$, el único $x \in D_{104}$ que lo cumple es $x = 1$, pero $\text{mcm}(1, 2 \cdot 13) = 2 \cdot 13 \neq 104$. Por tanto, 26 no tiene complementario en D_{104}.

d) Como 26 no tiene complementario en D_{104} se tiene que $(D_{104}, |)$ no es Retículo complementario y por tanto no es 'Algebra de Boole.

Ejercicio 3 (8 puntos)

a) Obtén una expresión booleana en forma de "mínima suma de productos" para la función booleana cuyo conjunto de verdad es $S(f) = \{1110, 1010, 1011, 1001, 0011, 0001\}$. Resuelve utilizando uno de los dos métodos estudiados: Quine McCluskey o mapa de Karnaugh.

Solución:

a) $\boxed{xzt' + y't}$

	1110	1010	1011	1001	0011	0001
1-10	√	√				
101-		√	√			
-0-1			√	√	√	√

Ejercicio 4 (4 puntos)

Demuestra por inducción que para todo $n \geq 1$ se cumple la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n}(8i + 5) = (4n + 9)n.$$

Solución:

1) Comprobamos la condición inicial: para $n = 1$ tenemos $8 + 5 = 13$ y $(4 + 9)1 = 13$ que son iguales.

2) Hipótesis de Inducción: suponemos el resultado cierto para $n = k$, es decir, $\sum_{i=1}^{k}(8i + 5) = (4k + 9)k$.

3) Comprobemos que el resultado es cierto para $n = k + 1$ (utilizando la hipótesis de inducción)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}(8i + 5) &= \sum_{i=1}^{k}(8i + 5) + (8(k + 1) + 5) \\
&= (4k + 9)k + 8k + 13 = 4k^2 + 17k + 13 = (k + 1)(4k + 13) = (k + 1)(4(k + 1) + 9)
\end{aligned}$$

Luego aplicando el teorema de Inducción el resultado es cierto para todo $n \geq 1$.

Ejercicio 5 (8 puntos)

Considera la ecuación diofántica $192x + 72y = 504$.

a) Razona si tiene solución y en caso afirmativo, utilizando el Algoritmo de Euclides, escribe todas las soluciones enteras.

b) Razona si hay soluciones estrictamente positivas.

Solución:

a) En primer lugar, usamos el algoritmo de Euclides para calcular que $\mathrm{mcd}(192, 72) = 24$. En efecto,

$$\begin{aligned} 192 &= 2 \times 72 + 48, \\ 72 &= 1 \times 48 + 24, \\ 48 &= 2 \times 24. \end{aligned}$$

Como $\mathrm{mcd}(192, 72) = 24$ divide al término independiente, tenemos que la ecuación diofántica $192x + 72y = 504$ tiene soluciones enteras.

A continuación usaremos el Teorema de Bezout para encontrar una solución particular de la ecuación. Es decir, buscamos $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $192 \times p + 72 \times q = 24$. Para ello despejaremos los restos en el algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} 48 &= 192 - 2 \times 72, \\ 24 &= 72 - 1 \times 48. \end{aligned}$$

Y eliminamos todos los restos menos el último, el $\mathrm{mcd}(192, 72) = 24$.

$$\left.\begin{aligned} 24 &= 72 - 1 \times 48 \\ 48 &= 192 - 2 \times 72 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; 24 = -192 + 3 \times 72$$

Por tanto, $(p, q) = (-1, 3)$ es una solución de la ecuación $192x + 72y = 24$. Y multiplicando por $\frac{504}{\mathrm{mcd}(192,72)} = 21$, encontramos una *solución particular*

$$(x_0, y_0) = (-21, 63)$$

de la ecuación $192x + 72y = 504$.

La solución general se encuentra añadiendo a la solución particular (x_0, y_0) un múltiplo entero del *vector de soluciones*

$$\frac{1}{\mathrm{mcd}(192, 72)}(72, -192) = (3, -8);$$

es decir, la solución general está dada por

$$\left\{\begin{aligned} x &= -21 + 3t, \\ y &= 63 - 8t, \end{aligned}\right.$$

con $t \in \mathbb{Z}$.

b) Las condiciones para la existencia de soluciones estrictamente positivas es que $-21+3t > 0$ y que $63-8t > 0$. Teniendo en cuenta que t solo puede tomar valores enteros, la primera condición es equivalente a que

$$3t > 21 \Leftrightarrow t > 7.$$

Y la segunda condición es equivalente a

$$63 > 8t \Leftrightarrow t < \frac{63}{8} \approx 7{,}8 \Leftrightarrow t \leq 7.$$

Como un entero no puede cumplir ambas condiciones simultaneamente, no hay soluciones enteras estrictamente positivas.